Analisi matematica II

29 Settembre 2014

Profs: Luigi De Pascale
Valentino Magnani

Libro di testo: Marcellini Sbordone An. Mat II versione semplificata per i nuovi corsi di laurea liguori + Liboni Liseccazi (2009) (1996)

Ricev: magnani@dm.unipi.it
17.00 - 19.00 Venerdì

Esame scritto ed orale + compitini

Programma: Funzioni di più variabili

(25) PV = nRT $F(P,V,T) = 0$ $P = G(T,V)$ Il metano non è un gas perfetto

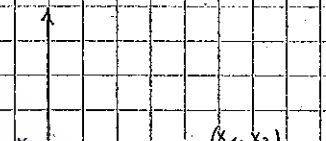
$\mathbb{R}$ non è più lo spazio ambiente, ma saremo in $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^N$

$\mathbb{R}^N = \{(x_1, \dots, x_N) : x_i \in \mathbb{R} \ (i=1,N)\}$

$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ Insieme delle coppie ordinate
(x, y)

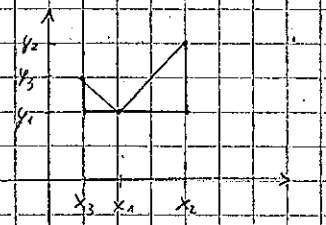
$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ (25) $(1,2) \neq (2,3)$
(x, y, z)

Nel piano prendiamo un s.d.r. fissando un'unità di misura



$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$ (Teo Pitagora)

$d[(x_1,y_1),(x_3,y_3)] = \sqrt{(x_3-x_1)^2 + (y_3-y_1)^2}$



$a, b \in \mathbb{R}$ $d(a,b) = |a-b| = \sqrt{(a-b)^2}$ $|a| = \sqrt{a^2}$

La Norma di un vettore è la sua distanza dall'origine

$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$

$(x,y) + (\bar{x},\bar{y}) = (x+\bar{x}, y+\bar{y})$ $\rightarrow d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} =$

$= \|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)\|$

Le proprietà della Norma: $\|(x_1, \dots, x_m)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_m^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2}$

(1) $0 \leq \|(x_1, \dots, x_m)\|$, $\|\ \| = 0 \iff (x_1, \dots, x_m) = (0, \dots, 0)$

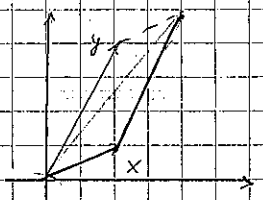
(2) $\|\lambda (x_1, \dots, x_m)\| = |\lambda| \, \|(x_1, \dots, x_m)\|$ dim $\sqrt{(\lambda x_1)^2 + \dots + (\lambda x_m)^2} =$

$= \sqrt{\lambda^2 (x_1^2 + \dots + x_m^2)} =$

$= |\lambda| \sqrt{x_1^2 + \dots + x_m^2}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cel. 388 9837745

③ Disuguaglianza triangolare $\|\underline{x}+\underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$



dim: $\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|$

$\langle \underline{x}+\underline{y}, \underline{x}+\underline{y} \rangle = \|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2 + 2\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$

Prodotto scalare — da vettori a numeri

$(x_1, \dots, x_m) \odot (y_1, \dots, y_m) = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_m y_m$ $\qquad \underline{x} = (x_1, \dots, x_m)$, $\underline{y} = (y_1, \dots, y_m)$

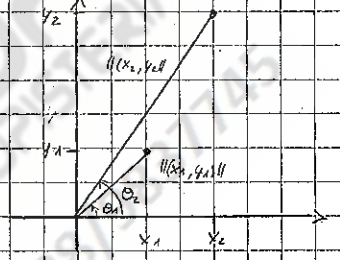
Notazione alternativa: $\langle (x_1, \dots x_m), (y_1, \dots, y_m) \rangle = \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \underline{x} \cdot \underline{y}$

(es) $(-3,2,1)$.

$\underline{x} \cdot \underline{x} = x_1^2 + \dots + x_m^2$

$\|\underline{x}\| = \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle} = \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x}}$ La norma di $\underline{x}$ è così scrivibile

Significato geometrico del prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$ $\qquad (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1x_2 + y_1y_2$



$x_1 = \|(x_1, y_1)\| \cos\theta_1$, $\quad y_1 = \|(x_1, y_1)\| \operatorname{sen}\theta_1$

$x_2 = \|(x_2, y_2)\| \cos\theta_2$, $\quad y_2 = \|(x_2, y_2)\| \operatorname{sen}\theta_1$

$\overline{(x_1, y_1)} \cdot (x_2, y_2) = \|(x_1, y_1)\| \cdot \|(x_2, y_2)\| \cos\theta_2 \cos\theta_1 + \|(x_1, y_1)\| \|(x_2, y_2)\| \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2$

$\|(x_1, y_1)\| \|(x_2, y_2)\| \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2$

$= \cos(\theta_2 - \theta_1)$

(es) Trovare l'angolo tra $(3,1), (5,7)$: $\quad \dfrac{\langle x_1, x_2 \rangle}{\|x_1\| \|x_2\|} = \dfrac{15+7}{\sqrt{10}\sqrt{25+0}} = \dfrac{22}{\sqrt{77}}$

Esercizio per casa: ① Ricavare la stessa identità con (x_2, y_2) in posizioni diverse (nel 2° e III° quadrante, ricordando che la norma rimane uguale)

② Ricavare la stessa identità in $\mathbb{R}^3$, abbiamo 2 angoli!

④ Disuguaglianza di Cauchy – Schwartz $\qquad \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle \leq \dfrac{\underline{x}^2}{2} + \dfrac{\underline{y}^2}{2}$

oppure: $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle \leq \dfrac{\|\underline{x}\|^2}{2} + \dfrac{\|\underline{y}\|^2}{2}$

(es) $\langle \underline{x} + t\underline{y}, \underline{x} + t\underline{y} \rangle$ con $t \in \mathbb{R}$ qualsiasi. Unica cosa che sappiamo è che t^2 è positivo poiché è il prodotto con se stesso $\Rightarrow t^2 \geq 0$!

$\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle + t^2 \langle \underline{y}, \underline{y} \rangle + 2t \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle =$

$= \|\underline{y}\|^2 t^2 + 2\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle t + \|\underline{x}\|^2 \geq 0$

$[at^2 + bt + c \geq 0$ ~ parabola $\Rightarrow \Delta$ è negativo) Scriviamo il Δ:

$\Delta: 4\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle^2 - 4\|\underline{x}\|^2 \|\underline{y}\|^2 \leq 0 \Rightarrow \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle^2 \leq \|\underline{x}\|^2 \|\underline{y}\|^2$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9827745

$\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2 \Rightarrow |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ Proprio da questa dimostrazione dimostriamo la ③

$|\langle x, y \rangle|$

Somma dei contenuti affrontati fino ad ora
- $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$
- Norma euclidea
- Prodotto scalare
- Distanza tra due punti
- Coseno dell'angolo compreso

Distanza ∀ coppia di punti associamo un numero

2 punti diversi devo essere positivi; indipendente dall'ordine e devo essere effettivamente passare da un punto all'altro ($\Rightarrow$ deve valere la disug. triangolare)

Altre norme $1 \leq p < +\infty$ • $\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \dots + |x_m|^p} \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

$p = +\infty$ • $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} |x_i|$ (05) $\|(1,2)\|_\infty = 2$ $\|(3,1)\|_\infty = 3$

$|x_0| = (|x_0|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{m} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \quad \forall p$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \ ; \ |x - x_0| < \delta, \ x \neq 0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$ ~ Definizione di limite (dove appare un modulo)

$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ — con estremi non compresi

$(x \text{ t.c. } |x - x_0| < \delta)$

$[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ — con estremi compresi

$B(\underline{x}^0, r) = \{ \underline{x} : \|x - x^0\| \ (2) \ r \}$

↓

Palla aperta di centro $\underline{x}_0$ e raggio r

altri modi per scriverlo: $= \{ \underline{x} : \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_m - x_m^0)^2} < r \}$

$= \{ \underline{x} : (x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_m - x_m^0)^2 < r^2 \}$

In $\mathbb{R}^2$ (x_0, y_0) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$ circonferenza con parte interna (scrivendo solo uguale solo circonf)

$x^2 + x_0^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + y^2 + y_0^2 \leq r^2$

Def: $A \subset \mathbb{R}^2$ aperto se $\forall x \in A \ \exists r : B(x, r) \subset A$

In questo esempio ④ prendendo ogni punto va bene perché l'insieme è aperto $\Rightarrow$ anche il più vicino è ok

Esempio ③ giallo — con estremo (asse x) è aperto? NO

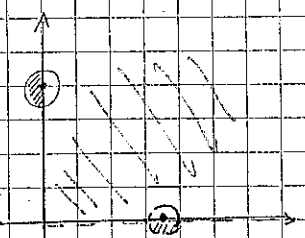
Esempio ④

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Def: $C \subset \mathbb{R}^2$ si dice **chiuso** se C^c (il suo complementare) è aperto

Gli insiemi non sono necessariamente aperti o chiusi!

(es) Non è né aperto né chiuso



ma ci sono dei punti che creano dei problemi = Punti di frontiera

Def: $A \subset \mathbb{R}^2$ ∂A **Frontiera di A** (o Bordo)

$$\partial A = \{ x \in \mathbb{R}^n : \forall r>0 \quad B(x,r) \cap A \neq \emptyset \quad B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset \}$$

la palla interseca sia A che il suo complementare; ma non deve per forza appartenere ad A

Def: Int $A = \mathring{A} = \{ x \in A : \exists r>0 \quad B(x,r) \subset A \}$ **Punti interni**

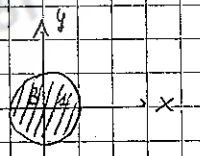
basta che ce ne sia una → non tutte $\Rightarrow$ Punti esterni

Def: Si dice che un insieme A è un **intorno** del punto x_0 se $\exists r>0 : B(x,r) \subset A$

(i.e. se x_0 è interno ad A)

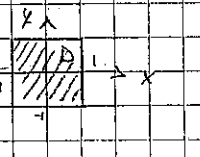
Ora abbiamo il problema di come si possono descrivere insiemi in $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$ di uso comune? (Serviranno uguaglianze o disuguaglianze che valgano generalmente per tutti)

(es) $B = \{ x^2+y^2 \leq 1 \}$



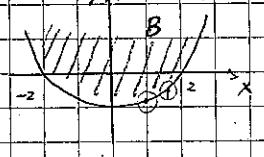
(es) $D = \{ |x| \leq 1 \text{ e } |y| \leq 1 \}$ oppure

$\max\{|x|,|y|\} \leq 1 \Rightarrow \| \quad \|_\infty \leq 1$



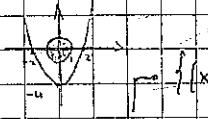
(es) B:

$$x^2 - 4 \leq y$$
$$0 \leq y - x^2 + 4$$
$$x^2 - y - 4 \leq 0$$



Gli insiemi "pieni" sono descritti da disequazioni; non pieni da equazioni

Esercizio per casa: Mostrare che $\partial B = \{(x,y) : y = x^2 - 4\}$?



$\Gamma = \{(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3\}$?

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dove vive il grafico? E il dominio? Sì perché in $\mathbb{R}^3$

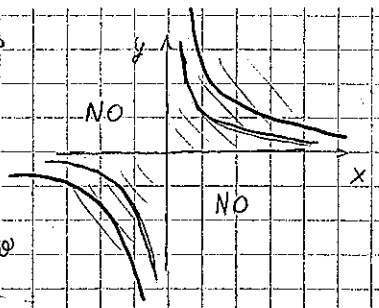
$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ posso disegnare il grafico? No perché sarebbe in $\mathbb{R}^4$

Def: $f : A \to B$ Il grafico di una funzione $(G(f))$ è l'insieme delle coppie $\{(a, f(a)) \subset A \times B\}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

•) $f(x,y) = \log x \cdot y$ $\quad D_f: x \cdot y > 0 \iff x \neq 0 \vee y \neq 0$

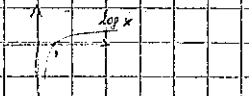
$D_{f(x,y)}$ = 1° e 3° quadrante aperto



Ma $\log x \cdot y = \log x + \log y$ } Sono uguali solo nel loro comune dominio

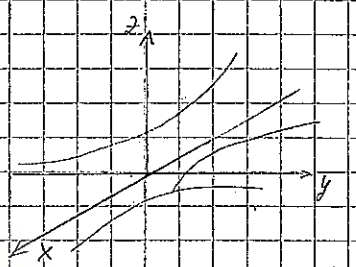
$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$?

$x^{\frac{1}{2}\frac{2}{3}} = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$



•) $\log x \cdot y = 0 \iff x \cdot y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$

•) $\log(x \cdot y) = 3 \Rightarrow x y = e^3 \Rightarrow y = \frac{e^3}{x}$



Il grafico in $\mathbb{R}^3$ è $\{(x,y,z) : z = \log x \cdot y\}$

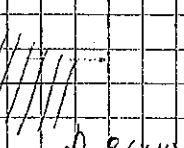
con programmi @ Geogebra

•) $f(x,y) = x^2 + y^2$ Dominio di $f(x,y) = \mathbb{R}^2$ (è tutto)

$f(\cdot,\cdot)$ si intende una sequenza di operazioni da fare nel dominio

•) $g(x,y) = \sqrt{x} \cdot y^3$ unica operazione che crea problemi è $\sqrt{x} \Rightarrow$ c.e. $x \geq 0$

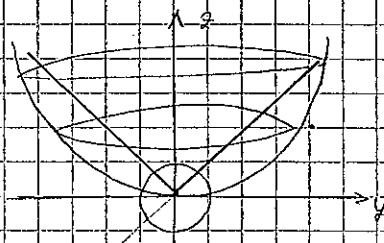
Dominio di $g(x,y) = [0; +\infty)$



V coppia (x,y) dobbiamo prendere $z = x^2 + y^2$ (Z ora è il codominio)

Paraboloide $\quad z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Dobbiamo vedere come è fatta la sua intersezione con $x = 0$ Fascio di circonferenze



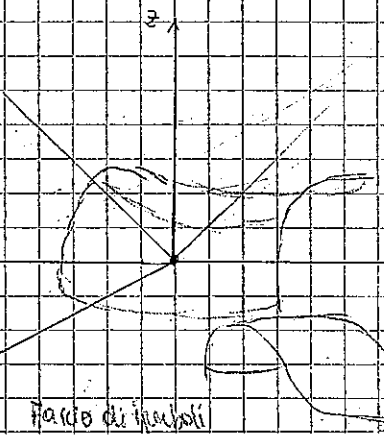
•) $f(x,y) = x^2 - y^2$ È un Iperboloide a sella

@ Disegnare Dominio, insieme in cui è cont. e grafico

$D_{f(x,y)} = \mathbb{R}^2$ (non abbiamo problemi)

Intersezioni $\begin{cases} x = 0 \\ f(x,y) = -y^2 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 0 \\ f(x,y) = x^2 \end{cases}$



$z = \sqrt{x^2 - y^2} = \sqrt{(x+y)(x-y)}$ $\quad z$ = Asse di simmetria

$z = 0 \iff x = \pm y$

$z = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$ Iperbole